

## 境界条件の変化と単独 I 桁の自重による不安定現象

## Lateral Torsional Buckling Response of I-section Girder due to Change of Boundary Conditions

能登宥愿\*  
Hiroyoshi NOTO

## Summary

If the length of an I-section girders exceed a specific value, they suffer lateral torsional buckling when being lifted singly, due to the low lateral rigidity of the compressive flange and the insufficient torsional rigidity of the member as a whole section.

Hence, this paper discusses the behavior of an I-section girder, in terms of stability or instability, when the boundary conditions of its supporting points are changed.

## 1. まえがき

I 桁の架設は、仮支点を設置して各部材毎に行われるか、支間がそれほど長くない場合は、2 本主桁に組立てて行われる。しかし、仮支点がなくかつクレーン能力またはクレーン反力点の強度上の理由等により、I 桁を単独で橋長分架ける必要が生じることもある。このたび実際の工事でこの確認が必要となったため、工場での吊り上げ実験と解析を行った。

本論文では主に解析について述べるものとする。

橋梁の I 桁は、薄板で構成されており自重も軽い、それにもまして横振れ座屈に抵抗する圧縮フランジの横曲げ剛性、全体の振れ剛性が非常に小さい。そこで横振れ座屈の対策としていろいろ考えられるが、ここでは支持点の境界条件、特に支持位置を変化させている。

## 2. 横振れ座屈の理論

初期不整のない理想状態の I 桁では、本来鉛直面内の曲げモーメントによって振れは生じない。しかし、製作、架設時に生ずる梁寸法の避けられない誤差、荷重の予期しえない小さい偏心により、実際には荷重の初期段階から断面に振りが生じる。荷重が順次増加し水平方向への面外曲げ変形が大きくなり、これにより梁の使用限界が決定されれば、横ねじれ座屈が生じたと考えられる。

\* 技術本部長大橋業務部付課長

梁に X-Y 面内の端モーメント、 $M_{Bz}$ 、 $M_{Tz}$  が作用する場合の釣合い方程式は次式になる。

$$EI_z \frac{d^2 v}{dx^2} = -M_z \quad (1)$$

$$EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} + M_z \phi = 0 \quad (2)$$

$$EI_w \frac{d^3 \phi}{dx^3} - (GJ + \bar{K}) \frac{d\phi}{dx} + M_z \frac{dw}{dx} - \left( \frac{M_{Tz} + M_{Bz}}{\ell} \right) w = 0 \quad (3)$$

$$\text{ただし、} M_z = -M_{Bz} + (M_{Tz} + M_{Bz}) \frac{x}{\ell} \quad (4)$$

$$\bar{K} = \int_A \sigma \cdot a^2 dA = M_z \left\{ \frac{\int_A y (z^2 + y^2) dA}{I_z} - 2y_0 \right\} = M_z \cdot \beta_z \quad (5)$$

ここに、

$I_y, I_z$  : Y、Z 軸まわりの断面 2 次モーメント

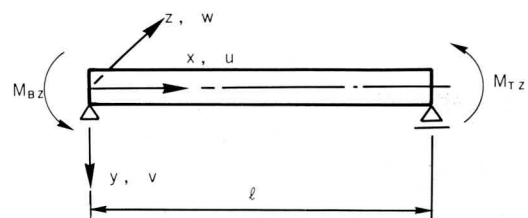


図-1 荷重と座標および変位

- J : St. Venantの振り抵抗
- I<sub>w</sub> : そり振りモーメント
- v, w : Y, Z方向の変位
- φ : X軸まわりの振り回転角
- M<sub>BZ</sub>, M<sub>TZ</sub> : 梁の両端に作用する端モーメント
- E : ヤング係数
- G : せん断弾性係数
- ℓ : 支間長
- σ : 着目断面の任意の点の応力
- a : σが作用している点とせん断中心との距離
- y<sub>0</sub> : せん断中心のY座標

横振れ座屈

(2)、(3)式を各々微分して

$$EI_Y \frac{d^4 w}{dx^4} + M_z \frac{d^2 \phi}{dx^2} + 2 \frac{dM_z}{dx} \frac{d\phi}{dx} = 0 \quad (6)$$

$$EI_w \frac{d^4 \phi}{dx^4} - (GJ + M_z \beta_Z) \frac{d^2 \phi}{dx^2} - \frac{dM_z}{dx} \frac{d\phi}{dx} \beta_Z + M_z \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad (7)$$

等曲げモーメント  $M_z = M_0$  をうける1軸対称断面の方程式

$$EI_Y \frac{d^4 w}{dx^4} + M_0 \frac{d^2 \phi}{dx^2} = 0 \quad (8)$$

$$EI_w \frac{d^4 \phi}{dx^4} - (GJ + M_0 \beta_Z) \frac{d^2 \phi}{dx^2} + M_0 \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad (9)$$

w を φ で表わし、かつ境界条件を次のようにする。

$$\left. \begin{aligned} w_{x=0} = w_{x=\ell} = w''_{x=0} = w''_{x=\ell} = 0 \\ \phi_{x=0} = \phi_{x=\ell} = \phi''_{x=0} = \phi''_{x=\ell} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

座屈モーメント式は次の通りとなる。

$$(M_0)_{cr} = \frac{n^2 \pi^2 EI_Y \beta_Z}{2 \ell^2} \left[ 1 \pm \sqrt{1 + \frac{4}{\beta_Z^2} \left( \frac{GJ \ell^2}{n^2 \pi^2 EI_Y} + \frac{I_w}{I_Y} \right)} \right] \quad (11)$$

(但し、n=1 が最小座屈モーメント式となる)

中間横荷重を受ける場合、座屈設計ガイドライン<sup>1)</sup>より次式となる。

$$(M_0)_{cr} = \frac{C_{b1} \pi^2 EI_Y \beta_Z}{2 \ell^2} \left[ \left( \frac{2 C_{b2} h_p}{\beta_Z} + C_{b3} \right) \pm \sqrt{\left( \frac{2 C_{b2} h_p}{\beta_Z} + C_{b3} \right)^2 + \frac{4}{\beta_Z^2} \left( \frac{GJ \ell^2}{\pi^2 EI_Y} + \frac{I_w}{I_Z} \right)} \right] \quad (12)$$

中間荷重として、等分布荷重 q を受ける場合、次の値となる。

C<sub>b1</sub> : 曲げモーメント分布形の変化を考慮するための係数=1.132

C<sub>b2</sub> : 中間横荷重の梁断面内の作用高さ (h<sub>p</sub>) の影響を考慮するための係数=0.459

C<sub>b3</sub> : 断面形の非対称性 (B<sub>Z</sub>) の影響を考慮するための係数=0.525

せん断中心とそり振りに関する定数

Z<sub>S</sub> : 中立軸とせん断中心のZ方向の距離=0.0cm

Y<sub>S</sub> : 中立軸とせん断中心のY方向の距離=ah-h<sub>1</sub>  
=62.96

h<sub>p</sub> : 重心とせん断中心との距離で重心が曲げの引張側にあるとき正の値  
=-Y<sub>S</sub>

I<sub>Z</sub>=5,534,590cm<sup>4</sup>      I<sub>Y</sub>=113,911cm<sup>4</sup>

$$\alpha = \frac{1}{1 + (b_1/b_2)^3 (t_1/t_2)} = 0.874$$

$$I_w = \frac{b_1^3 t_1 h^2}{12} \alpha = 722,843,400 \text{cm}^6$$

$$J = \frac{1}{3} \sum b_i t_i^3 = 1,080 \text{cm}^4$$

$$\beta_Z = \frac{1}{I_Z} \left\{ b_2 t_2 h_2 \left( \frac{b_2^2}{12} + h_2^2 \right) + \frac{t_w}{4} (h_2^4 - h_1^4) - b_1 t_1 h_1 \left( \frac{b_1^2}{12} + h_1^2 \right) \right\} = -41.16 \text{cm}$$

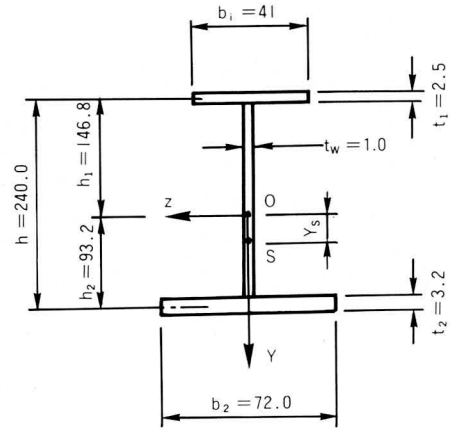
(M<sub>0</sub>)<sub>cr</sub>=11,822,368kg・cm

フランジが変断面の場合

(M<sub>0</sub>)'<sub>cr</sub>=C<sub>r</sub>・(M<sub>0</sub>)<sub>cr</sub>=68.27t・m

フランジが上下とも変化する場合

C<sub>r</sub>=0.6r<sub>b</sub>+0.4r<sub>b</sub><sup>2</sup>=0.578 (但し、r<sub>b</sub>=b<sub>min</sub>/b<sub>max</sub>)



### 3. FEM立体解析

2点支持のI桁は、その形状から判断して横曲げ剛性、捩れ剛性が極端に小さく、応力レベルが低い状態で不安定な挙動を生じやすい。そこで幾何学的非線形の大変形問題として取扱った。幾何学的非線形性は、ひずみと変位の関係あるいは応力と力の関係の非線形性である。

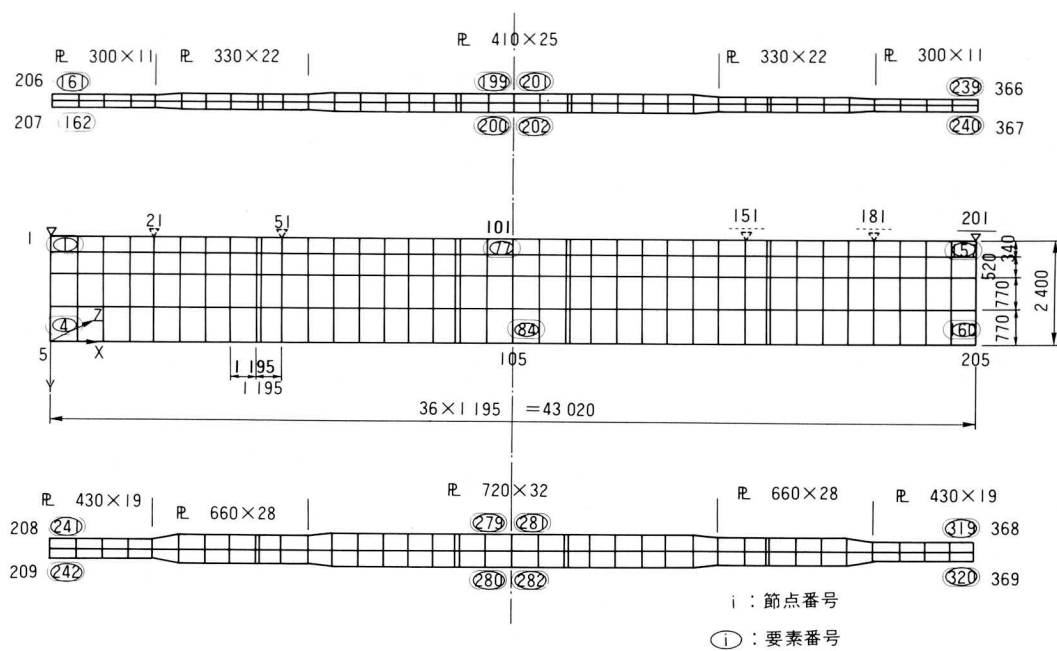


図-3 節点および要素図

解析は汎用構造解析プログラム“MARC”を使用しており、解析手法は接線剛性法によっている。

(1) 構造のモデル化

本I桁はウェブ高は一定であるが、合成桁であるため上フランジ（圧縮フランジ）が下フランジに比べて、極端に狭くかつ両フランジ共変断面である。

メッシュ分割は図-3に示す通りである。

要素は4辺形シェル要素であり、上下フランジ各80、ウェブ160の合計320要素である。また要素の厚さ方向は3層としている。節点は369個であり、1節点当りの自由度は全体座標系のX、Y、Z方向変位、X、Y、Z軸まわりの回転角の6自由度である。

腹板の水平、垂直補剛材は、腹板の直応力度が吊り上げ支持状態ではかなり小さく、局部座屈の恐れがないので省略した。

(2) 支持点の境界条件

吊り支持点の高さ方向の位置は上フランジのウェブ直上で、橋軸方向位置は次の通りである。

- ① 端点 節点番号 Pt. 1, Pt.201 : CASE-A
- ②  $l/9$ 点 " Pt.21, Pt.181 : CASE-B
- ③  $l/4$ 点 " Pt.51, Pt.151 : CASE-C

自由度の拘束条件

絶対座標軸および各変位は図-4の通りである。

一方の支点

$u_1 = v_1 = w_1 = 0$  : 絶対座標系の各軸方向の変位が零

$\theta_{x1} = 0$  : 絶対座標系X軸まわりの捩れ回転角が零

他方の支点

$v_2 = w_2 = 0$  : 絶対座標系Y、Z軸方向の変位が零

$\theta_{x2} = 0$  : 絶対座標系X軸まわりの捩れ回転角が零

(3) 荷重

鋼重を実際に則して分布荷重とし、各要素のX軸に平行な辺に載荷する。

荷重の大きさは、構造物の不安定な挙動をみるために自重の10%から400%までを載荷している。

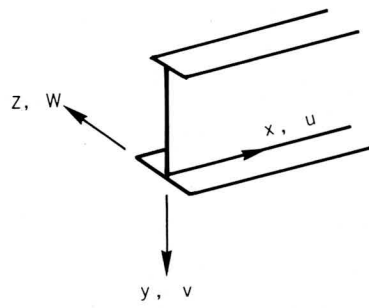


図-4 絶対座標系および各変位

また支持点が  $l/4$  のCASE-Cでは、重力方向下向きに400%の荷重を載荷する他に、現実には起こり得ないが、重力方向逆向きに荷重を載荷している。

#### 4. 解析結果と考察

全体構造物の自由度が約2000と大きくなっているため、座屈固有値を正確にみつけることが難しいこと、また構造物の安定から不安定への挙動が知りたいことなどから、荷重を必要に応じて適宜分割し、自重の10%から400%に変化させた。また理論解の近似値計算から、端点支持状態が不安定現象を呈することがあらかじめ分かっていたので、支持点を内側に入れるケースをいくつか設定した。

##### (1) 端点支持状態 CASE-A

荷重比（自重に対する比で  $P/P_0$  で表わす）と支間中央の鉛直変位 ( $v$ ) の関係を図-5に示す

$P/P_0$  が0.525 (Increment 8 以後Inc. 8 と称す) までは  $P/P_0-v$  はほぼ線形に推移し、計算値の中で最高荷重を示す。これ以降は荷重がほとんど変化せず変位のみが増加する。この変位を圧縮側のウェブの上端 (pt.101)、引張側の下端 (pt.105) でみると、下端は線形に1cm位変位した後、Inc.33で2.2cm位までの変位に対して、上端はInc.33で7.3cm以上となり、解析を続ければ更に増加する傾向である。

次に  $P/P_0$  と支間中央の水平変位 ( $w$ ) の関係を図-6に示す。

$P/P_0$  が0.420 (Inc. 6) までは、 $P/P_0$  が増加しても  $w$  はほとんど生じない。しかし、Inc. 8 位から変化しはじめる。

圧縮側の上端では、1.4cm位の水平変位が  $P/P_0$  の変化をあまり伴わず、40cm位 (Inc.33) へと大きくなっており、明らかに横振れ座屈現象を表わしている。また引張側の下端では、水平変位が上端と反対方向に徐々に増加するものの、Inc.33で10cm位である。これは引張側の下端を振れの中心として、上端が大きく横振れしていく現象とみることができる。

図-7にInc.33の桁の  $v$ 、 $w$  の変形を示す。

変形形状は上下端共、支間を割線とする放物線形である。 $v$ 、 $w$  共圧縮側の上端が卓越しているが、特に  $w$  は顕著であり、横振れ座屈を良く表わしている。

次に応力状態を図-8に示す。

Inc. 0 からInc. 8 まではほとんどフランジ内で均等応力であったものが、Inc. 9 の上フランジで  $-15 \sim -285 \text{kgf/cm}^2$ 、

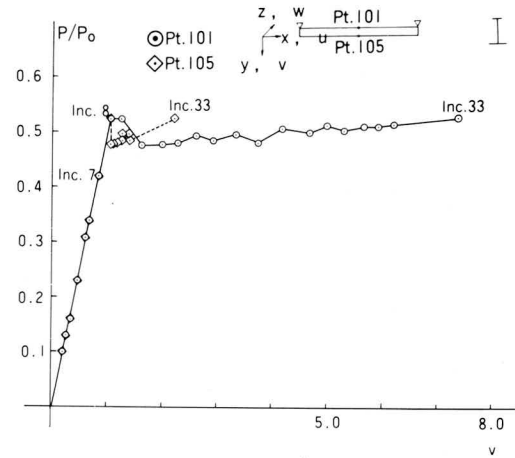


図-5 CASE-A  $P/P_0-v$

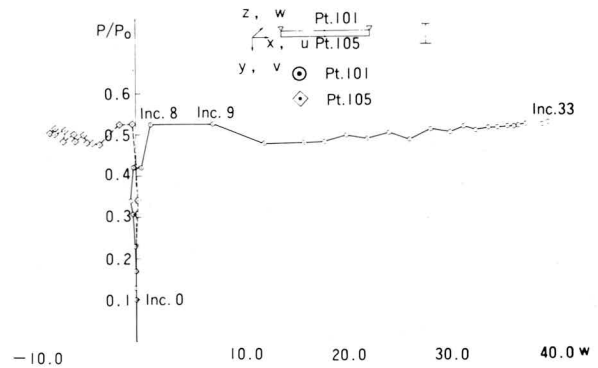


図-6 CASE-A  $P/P_0-w$

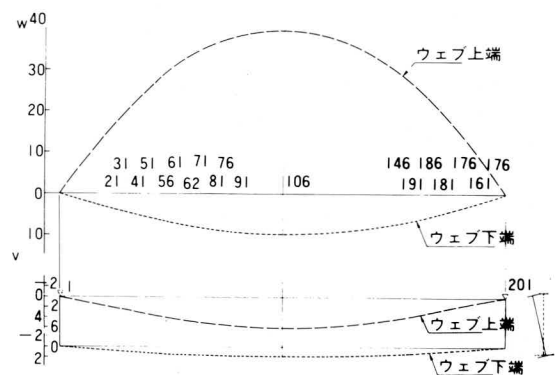


図-7 CASE-Aのウェブ上、下端の  $v$ 、 $w$  の変形 (Inc. 33)

Inc.33で  $650 \sim 920 \text{kgf/cm}^2$  となっている。下フランジ内ではInc. 9 で  $60 \sim 135 \text{kgf/cm}^2$ 、Inc.33で  $-110 \sim 305 \text{kgf/cm}^2$  となっている。

ウェブでは各インクリメント共、中立軸が同一点で応力分布は鉛直曲げの値と同一である。これから分かるように、上フランジではInc. 9 位から水平曲げが徐々に発生し、Inc.33では最小応力 ( $\sigma_{min} = -920 \text{kgf/cm}^2$ ) が平均応力

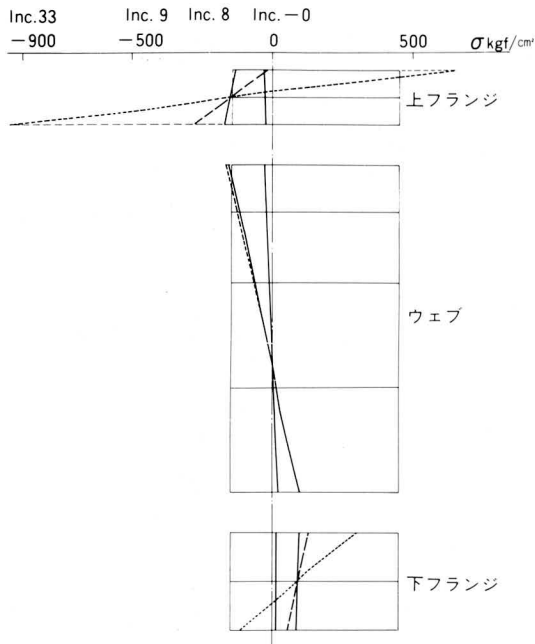


図-8 CASE-Aの支間中央断面の直応力度

( $\sigma_{mean} = -135 \text{ kgf/cm}^2$ ) のほぼ7倍となり、極度に大きくなっている。

また下フランジでは上フランジ程顕著ではなく、Inc.33で最大応力( $\sigma_{max} = 305 \text{ kgf/cm}^2$ )が平均応力( $\sigma_{mean} = 97.5 \text{ kgf/cm}^2$ )の3倍程となっている。これらの応力状態も変形の結果と同じように、圧縮フランジの大きな横方向変形を示しており、箱桁のような閉断面と異なり、横振れ座屈に対する圧縮フランジの横剛性の重要性を示している。

## (2) $l/9$ 点支持状態 CASE-B

端点支持状態では、自重の50%位の荷重で不安定状態になってしまうことが判明したので、端点から  $l/9$  の位置を支持位置に設定した。荷重比 ( $P/P_0$ ) と支間中央の鉛直変位 ( $v$ ) の関係を図-9に示す。

上端では  $P/P_0$  が 1.48 (Inc.15) まで、 $P/P_0 - v$  がほぼ線形に推移し、これ以降は勾配が多少水平方向に折れ、1.58 (Inc.24) 以降では変位のみが増加する。

下端では  $P/P_0$  が 1.64 (Inc.20) まで  $P/P_0 - v$  がほぼ線形に推移し、これ以降は変位のみが増加するが、その量は上端と比べて小さい。

次に  $P/P_0$  と支間中央の水平変位 ( $w$ ) の関係を図-10に示す。

上端では  $P/P_0$  が 1.12 (Inc.10) で  $w$  が 0.47cm となり、ここまではほとんど変位が生じない。これ以降勾配が少

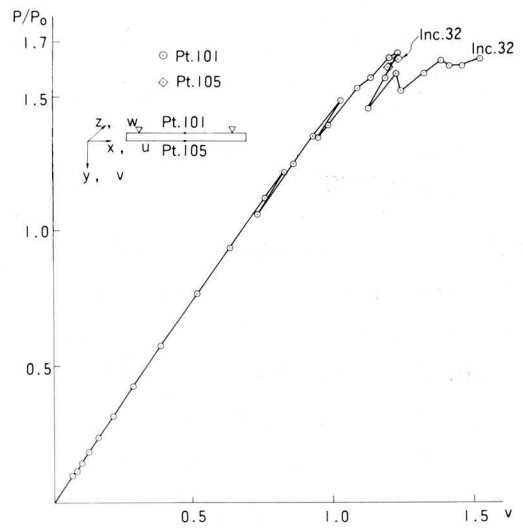


図-9 CASE-B  $P/P_0 - v$

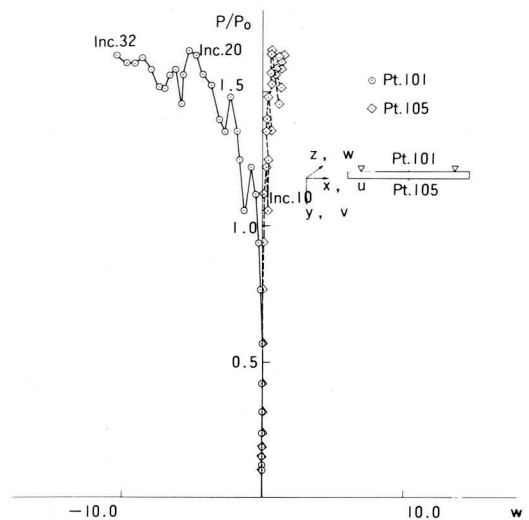


図-10 CASE-B  $P/P_0 - w$

し変化し、 $P/P_0$  が 1.64 (Inc.20) からは勾配がほぼ水平になり、 $P/P_0$  の増大がないのに変位のみが増大する。Inc.32では  $P/P_0 = 1.633$ 、 $w = 10.4 \text{ cm}$  となる。また引張側の下端では、Inc.20で 0.61cm となりここまではほとんど変位しない。これ以降も徐々に変位のみ増えるが、Inc.32で  $w = 1.4 \text{ cm}$  となるだけで、圧縮側の  $1/7.5$  位の変位である。

これは引張の下端を振れの中心として上端が横振れしていく現象とみられるが、CASE-A よりもかなり座屈耐荷力が上昇していることが分かる。

図-11にInc.32の桁の  $v$ 、 $w$  の変形形状を示す。

変形形状は、上下端のうち下端の  $w$  を除いて支間 ( $7l/9$ ) を割線とする放物線形で、張出し部は支持部から接線方

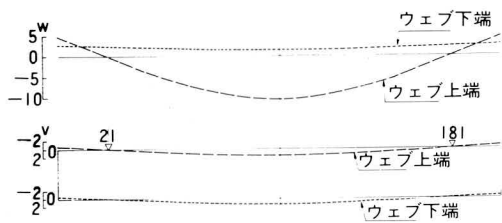


図-11 CASE-Bのウェブ上、下端のV、Wの変形(Inc. 32)

向にほぼ延長した形になっている。下端のwのみは支持点（上端のみ水平方向拘束）でも変位を有している。

次に応力状態を図-12に示す。

Inc. 0 からInc.10まではほとんどフランジ内で均等応力であったものが、Inc.30の上フランジで $-95 \sim -470 \text{ kgf/cm}^2$ 、Inc.32で $95 \sim 695 \text{ kgf/cm}^2$ となっている。下フランジ内では、Inc.30で $150 \sim 215 \text{ kgf/cm}^2$ 、Inc.32で $100 \sim 255 \text{ kgf/cm}^2$ となっている。

ウェブには横曲げの影響はでていない。

これらで分かるように上フランジでは、Inc.15位から水平曲げが徐々に発生し、Inc.32では最小応力 ( $\sigma_{min} = -695 \text{ kgf/cm}^2$ ) が平均応力 ( $\sigma_{mean} = -300 \text{ kgf/cm}^2$ ) のほぼ2.3倍となっている。

また下フランジでは上フランジ程顕著ではないが、Inc.32で最大応力 ( $\sigma_{max} = 255 \text{ kgf/cm}^2$ ) が平均応力 ( $\sigma_{mean} = 178 \text{ kgf/cm}^2$ ) の1.4倍となっている。これらの応力状態はCASE-Aよりはだいぶ改善されているが、変形の結果と同じように圧縮フランジの大きな横方向変形を示しており、振れ剛性の小さいI桁の圧縮フランジの横剛性の重要性を示している。

### (3) $l/4$ 点支持状態 CASE-C

$l/9$ 点支持状態で自重の1.6倍位の座屈荷重を有することが判明したが、解析、施工の誤差を考慮して端点から $l/4$ の位置を支持位置に設定した。

荷重比( $P/P_0$ )と鉛直方向の変位( $v$ )の関係を調べる。

鉛直下向きの荷重に対しては、張出し先端、支間中央の変位は前者、後者とも上、下端で同値であるが前者の方が大きいので、前者の上、下端について図-13に示す。

荷重を自重の10%ずつ増し、400% (Inc.39) 迄あげたが、 $P/P_0 - v$ の関係は完全に線形であった。

そこで、実際にはありえないが、構造特性をみるために鉛直上向きの荷重を載荷した。その結果、 $P/P_0$ が0.779

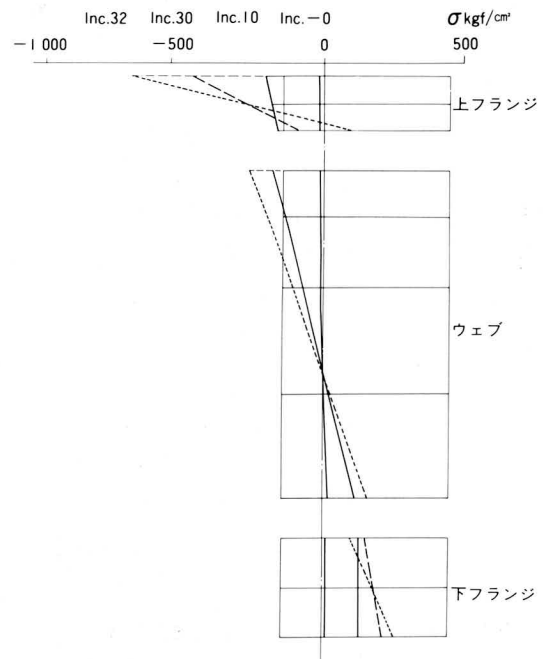


図-12 CASE-Bの支間中央断面の直応力度

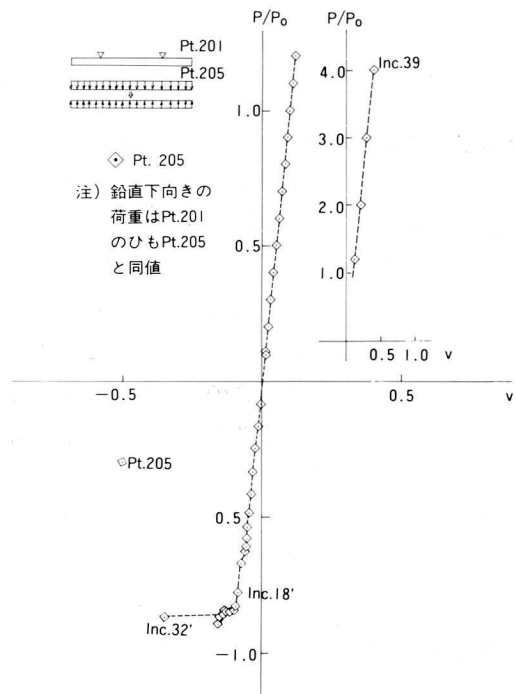


図-13 CASE-C  $P/P_0 - v$

(Inc.18')で $P/P_0 - v$ の線上から少しシフトするが、 $P/P_0$ が0.842 (Inc.21')まではほとんど同じ勾配で、その後 $v$ が0.1cmを超えると、荷重の増加がなくても変位のみが増大する。

次に $P/P_0$ と支間中央および張出し先端の水平方向変位( $w$ )の関係を図-14、図-15に示す。

鉛直下向きの荷重に対しては、両者の上、下端とも荷重比 $P/P_0$ が400%までほとんど変位を生じない。

そこで逆向きの荷重を载荷してみた。

$P/P_0$ と支間中央の $w$ の関係を図-14に示す。

引張側となる支間中央の上端(pt.101)はInc.32'( $P/P_0=0.864$ )まで変位は零である。圧縮側となる支間中央の下端(pt.105)はInc.15'( $P/P_0=0.623$ )迄はほぼ変位は零に近いが、それ以降は変位が生じ、Inc.21'( $P/P_0=0.842$ )で2.9cm位となり、さらにそれ以降は荷重の増加なしに変位のみが増し、Inc.32'で11.6cmとなる。

次に $P/P_0$ と張出し先端の $w$ の関係を図-15に示す。

引張側の影響をうける張出し先端の上端(Pt.201)はPt.101と同様にInc.32'まで変位は零に近い。張出し先端の下端(Pt.205)はPt.105と非常に似通った変位曲線を示している。

このことから、支持点を $l/4$ に設置することは横振れ座屈に対して最も効果的であり、座屈耐荷力が最大になることが推定できる。

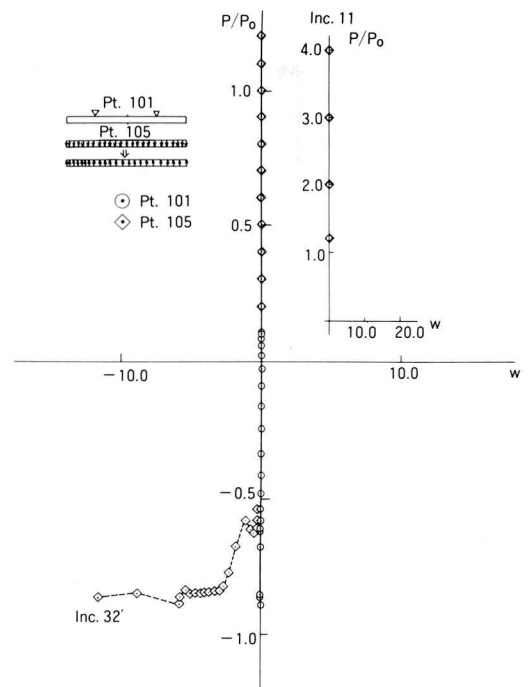


図-14 CASE-C  $P/P_0$ - $w$ (支間中央)

## 5. まとめ

立体FEM解析結果から次のことが言える。

横振れ座屈の耐荷力の向上を図る目的で、吊り位置を桁端部、端部から支間中央へ $l/9$ の位置、 $l/4$ の位置へと変化させ、その3ケースについて解析した。

端点支持では、自重の約0.5倍、 $l/9$ 点支持で1.6倍の座屈荷重となった。しかし、 $l/4$ 点支持では4倍の荷重でも座屈は生じなかった。このように座屈耐荷力が上がるのは、スパンが短くなることと、張出し部を有することの相乗効果と考えられる。

荷重比と鉛直方向変位、荷重比と水平方向変位は、その挙動の変化点である、安定、不安定の境目で良く類似している。

座屈時の変形形状は、いずれのケースでもほぼ引張側のウェブとフランジの交線を振れ中心にして、振れが生じている。このことからI桁のような開断面では、振れ剛性が小さいため、圧縮フランジの横剛性が横振れ座屈に抵抗していることが分かる。

理論値と立体FEM解析結果の横振れ座屈モーメントでは、近似値計算による理論値の方が25%位大きい。

次に工場内での吊上げ実験について述べる。実験は実橋に使う桁を使用したので、上フランジに横振れ座屈防止として片側14.5cmの隙間を確保して衝立を設置した。

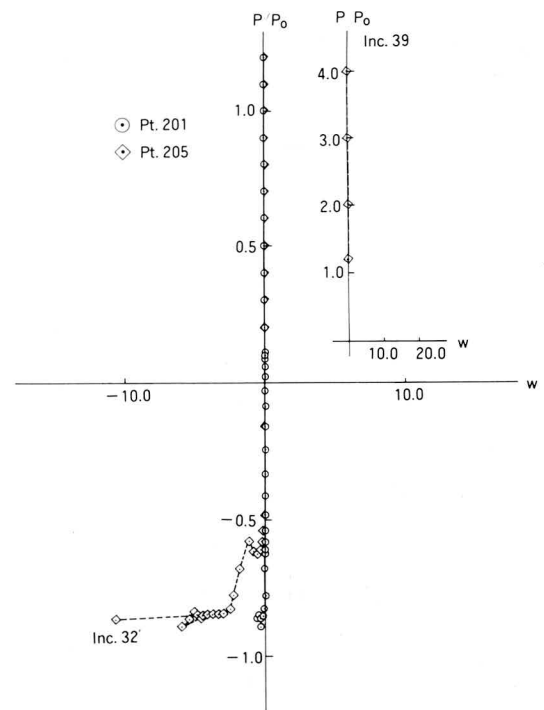


図-15 CASE-C  $P/P_0$ - $w$ (張出し端)

実験の結果、 $l/9$ 点、 $l/4$ 点支持ではなんら問題なく吊上げることができた。しかし端点支持では桁を地切りすると同時に衝立に桁がもたれかかり、計算値を裏付ける格好になった。

## 6. あとがき

本文では、境界条件をかなり限定している。また吊上げ時に衝撃力が加わらないように静かに吊上げることを前提としている。今後は、支持位置を絞り、さらに実際の条件と合わせるべく吊ワイヤーを介在させるとともに、衝撃による動的部分を考慮して検討してみたいと思っている。

本検討で行った 立体 F E M 解析は、当社で導入した汎用構造解析プログラム “M A R C” を使用している。

### 〈参考文献〉

- 1) 土木学会；座屈設計ガイドライン、昭和62年10月
- 2) 福本・西野共訳；鋼構造部材と骨組 ー強度と設計ー、昭和45年10月

## グラビア写真説明

### 富田沢橋

天竜川が眼下に流れ、その先に中央アルプスの峰を仰ぐ急峻地形に架かる本橋は、長野県南部伊那地方の大型農耕機の使用を可能とする、広域営農団地農道整備事業の一環をなすものである。架設工法は地形、橋梁形式等の条件からケーブルクレーンによる直吊工法を採用している。また、谷が深く高所作業であることを考慮し、アーチ弦材、支柱は荷取場で面材に組立てた。

晩秋からの当地は、天竜川から立ち込める水蒸気が霧となり、山肌をつたわり現場へと押し寄せる日々のため塗装作業が大巾に遅れた……が、その霧が当地方の干柿に非常に良く名産地にしている。(仁平)

### 城南橋

主要地方道金沢・美川・小松線が梯川を渡る位置にあり、北陸自動車道の小松インターチェンジと小松市内、小松空港を結ぶ重要な橋である。

このため年々交通量の増加がみられ、昭和63年に第2期工事として、昭和51年に弊社が施工した現橋の下流に架設されたものである。

近くには、義経、弁慶の勳進帳で有名な安宅の関跡があり、義経主従の名場面が思い起こされる。今、このあたりには高速道路が走り、時の隔たりを大きく感じる。(関)